Übungsblatt 4

16.6.2016

1) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $x^2y' - 2xy = 1/x$
b) $2xy(x+1)y' = y^2 + 1$
c) $y^{(6)} - y^{(4)} = 10x$
d) $x^2y'\cos y + 2x\sin y = 0$
e) $y' = -y^2\, e^x$
f) $(1+x^2)y - (1-y^2)xy' = 0$
g) $y' = \dfrac{2xy^2 + x}{x^2y - y}$
h) $y' = (\sin x - y)\cos x$
i) $y^{(3)} + y = \sin x$
j) $y' + \dfrac{y}{x} = 4$
k) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
l) $y'\sqrt{x^2+1} + xy = x$
m) $y' = \sin(x)\tan(y)$

2) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Zwei partikuläre Lösungen dieser Gleichung sind:

$$y = \cos(\omega x) \qquad , \qquad y = \sin(\omega x)$$

a) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$ zur Lösung der Differentialgleichung. Zeigen Sie, wie man daraus durch geeignete Wahl der freien Konstanten die angegebenen partikulären Lösungen gewinnen kann.

b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung auf eine *andere* Art als in Teilaufgabe **(2a)**. Wie gewinnt man aus dieser allgemeinen Lösung die angegebenen partikulären Lösungen?

3) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} = \ln x$$

auf zwei verschiedenen Wegen:

a) als lineare DGL,

b) mit Hilfe eines integrierenden Faktors,

und zeigen Sie, daß die Resultate gleich sind.

4) Bestimmen Sie den Typ und die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{2y - 2y'}{1 - \cos x} = e^{\sin x} + e^{\sin x}$$

Zeigen Sie, daß Ihre allgemeine Lösung die Differentialgleichung erfüllt. *Hinweis:* Verwenden Sie zur Lösung der inhomogenen DGL keinen Störgliedansatz, sondern die Variation der Konstanten. Warum kann ein Störgliedansatz hier eigentlich gar nicht gemacht werden?

5) Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind spezielle Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

a) Machen Sie für die Lösung dieser Differentialgleichung einen Potenzreihenansatz $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und zeigen Sie, daß sich daraus folgende Rekursionsformel für die Koeffizienten ergibt:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)}\, a_k$$

Zeigen Sie, daß aus dieser Rekursionsformel unmittelbar die Gültigkeit dieser drei Behauptungen folgt: Die Koeffizienten a_k mit geraden bzw. ungeraden Indices k bilden zwei voneinander unabhängige Serien. In beiden Serien gilt, daß alle Koeffizienten a_j mit $j > i$ Null sind, sobald a_i Null ist. Für $k = n$ ist $a_{k+2} = 0$.

b) Per Konvention verlangt man $P_n(x) = 1$ für $x = 1$. Außerdem wird a_1 (bzw. a_0) gleich Null gesetzt, wenn ein gerader (bzw. ungerader) Wert von n vorgegeben wird. Was bedeutet dies (zusammen mit den Erkenntnissen aus Teilaufgabe a) für das Aussehen der Funktionen $P_n(x)$?

c) Konstruieren Sie aus allen diesen Angaben die Legendre-Polynome $P_n(x)$ für $n = 2$ und $n = 3$.

6) Gegeben ist folgende Differentialgleichung mit zwei Anfangsbedingungen:

$$y'' + y = 0 \qquad , \qquad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$$

a) Diagnostizieren Sie diese Differentialgleichung vollständig. Warum benötigt man zur Festlegung einer speziellen Lösung zwei Anfangsbedingungen anstatt nur einer?

b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit einem Verfahren Ihrer Wahl (das sich aber von denen der beiden folgenden Teilaufgaben unterscheiden muß). Bringen Sie, falls erforderlich, Ihre Lösung auf eine rein reelle Form. Verwenden Sie dann die beiden Anfangsbedingungen zur Bestimmung der zugehörigen speziellen Lösung.

c) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes. Verwenden Sie wiederum die beiden Anfangsbedingungen zur Bestimmung der zugehörigen speziellen Lösung.

d) Als eine spezielle Lösung sei $y_{p1} = \cos(x)$ vorgegeben. Verwenden Sie diese Zusatzinformation, um mit dem Ansatz $y = u(x) \cdot y_{p1}$ die Ordnung der Differentialgleichung zu erniedrigen und über die Bestimmung von u die allgemeine Lösung zu ermitteln. (*Hilfe:* Ggf. benötigen Sie das Integral $\int \cos^{-2} x \, dx = \tan x + C$)

e) Erklären Sie, warum die allgemeine Lösung aus Teilaufgabe (Dc) tatsächlich dieselbe ist wie die allgemeinen Lösungen aus den Teilaufgaben (Db) bzw. (Dd).

7) Gegeben ist Differentialgleichung (DGL) $y''' - 4y' = 0$.

a) Diagnostizieren Sie diese DGL *vollständig.*

b) Reduzieren Sie die Ordnung dieser DGL mit dem Ansatz $u = y'$. Konstruieren Sie die allgemeine Lösung der resultierenden DGL in u. Ermitteln Sie daraus durch Integration die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL und überprüfen Sie diese.

c) Lösen Sie die ursprüngliche DGL durch einen Potenzreihenansatz $y = \sum_i a_i x^i$. Ermitteln Sie alle Koeffizienten a_0 bis a_6. Wieviele dieser Koeffizienten müssen unbestimmt bleiben und warum ist dies so? Notieren Sie das Lösungspolynom für y mit allen ermittelten Termen so, daß es nur noch die unbestimmten Koeffizienten enthält, nicht die anderen.

d) Die beiden in (b) und (c) ermittelten Lösungen scheinen nicht übereinzustimmen. Finden Sie eine Möglichkeit, trotzdem nachzuweisen, daß beide Lösungen tatsächlich gleich sind.