Übungsblatt 2: Lösungen

16.6.2016

1) Lösungswege:

a) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, linear aber nicht separierbar. ⇒ Lösung als lin.DGL 1.Ordng.; entweder Standardlösungsweg nachvollziehen (homogene DGL separieren, bei inhomogener DGL Variation der Konstanten) oder vorgegebene Lösungsformeln verwenden.

b) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, nicht linear aber separierbar ⇒ separieren und integrieren (Integral in x notfalls via Partialbruchzerlegung).

c) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 6.Ordnung, linear mit konstanten Koeffizienten ⇒ Lösung der homogenen DGL mit Euleransatz; Störgliedansatz zur Lösung der inhomogenen DGL (dabei Vorsicht: Ansatz $y = ax + b$ ist ein Resonanzfall; weil zwei linear unabhängige Terme beibehalten werden müssen, lautet der korrigierte Störgliedansatz $y = ax^5 + bx^4$).

d) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, nicht linear, separierbar und exakt ⇒ Standardlösungsweg für exakte DGLs oder für separierbare DGLs durchführen.

e) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, nicht linear, aber separierbar ⇒ separieren und integrieren (unproblematisch).

f) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, nicht linear aber separierbar ⇒ separieren und integrieren (unproblematisch).

g) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, nicht linear aber separierbar (! weil der Bruch in zwei Faktoren zerlegt werden kann, deren einer nur von x und der andere nur von y abhängt) ⇒ separieren und (mit offensichtlichen Substitutionen) integrieren.

h) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, linear ⇒ entweder Standardlösungsweg nachvollziehen (homogene DGL separieren, bei inhomogener DGL Variation der Konstanten) oder vorgegebene Lösungsformeln verwenden.

i) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 3.Ordnung, linear mit konstanten Koeffizienten ⇒ Lösung der homogenen DGL mit Euleransatz (Achtung: zwei der Lösungen sind (konjugiert) komplex), Störgliedansatz zur Lösung der inhomogenen DGL (kein Resonanzfall).

j) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, linear ⇒ entweder Standardlösungsweg nachvollziehen (homogene DGL separieren, bei inhomogener DGL Variation der Konstanten) oder vorgegebene Lösungsformeln verwenden.

k) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 2.Ordnung, linear mit konstanten Koeffizienten ⇒ Lösung der homogenen DGL mit Euleransatz, Störgliedansatz zur Lösung der inhomogenen DGL (Achtung doppelter Resonanzfall!).

l) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, linear ⇒ entweder Standardlösungsweg nachvollziehen (homogene DGL separieren, bei inhomogener DGL Variation der Konstanten) oder vorgegebene Lösungsformeln verwenden.

m) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 1.Ordnung, nicht linear, separierbar ⇒ separieren und integrieren.

Lösungen:

a) $y_{ai} = \frac{-1}{4x^2} + cx^2$

b) $y^2 = \frac{cx}{x+1} - 1$

c) $y_{ai} = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{-x} + c_6e^x - x^5/12$

d) $x^2 \sin y = c$

e) $\frac{1}{y} = e^x + c$

f) $y = cxe^{(x^2+y^2)/2}$

g) $2y^2 + 1 = c(x^2 - 1)^2$

h) $y_{ai} = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$

i) $y_{ai} = c_1e^{-x} + e^{x/2}\left\{c_2\cos(\sqrt{3}\,x/2) + c_3\sin(\sqrt{3}\,x/2)\right\} + (\sin x + \cos x)/2$

j) $y_{ai} = 2x + \frac{c}{x}$

k) $y_{ai} = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

l) $y_{ai} = 1 + c\,e^{-\sqrt{x^2+1}}$

m) $y_{ai} = \arcsin\left(c\,e^{-\cos(x)}\right)$

2) Lösungswege:

a) Potenzreihenansatz einsetzen, liefert Rekursionsbeziehung zwischen a_{i+2} und a_i $\Rightarrow$ zweiteilige Lösung: (1) mit Setzung $a_1 = 0$ sind alle a_i mit ungeradem Index i Null, a_0 ist ein freier Parameter und bestimmt alle a_i mit geradem Index i, Berechnung von a_2, a_4, etc., zeigt, daß sich die Taylorreihe des $\cos(\omega x)$ ergibt, mit $a_0 = 1$ ergibt sich also die angegebene Lösung $y = \cos(\omega x)$; (2) mit Setzung $a_0 = 0$ sind alle a_i mit geradem Index i Null, und alle a_i mit ungeradem Index bilden die Sinus-Taylorreihe, sodaß sich analog die andere angegebene partikuläre Lösung $y = \sin(\omega x)$ ergibt.

b) *Diagnose:* gewöhnliche DGL 2.Ordnung, linear mit konstanten Koeffizienten, homogen $\Rightarrow$ Euleransatz liefert die vollständige, allgemeine Lösung (keine Behandlung einer inhomogenen DGL nötig). Geeignete Setzung der beiden freien Konstanten liefert mit den üblichen Beziehungen zwischen den komplexen Exponentialfunktionen einerseits und sin/cos andererseits wiederum die beiden angegebenen partikulären Lösungen.

3) Lösungswege sind angegeben, zu beachten ist lediglich:

b) Die DGL ist in angegebener Form nicht exakt, kann aber mit dem integrierenden Faktor $a(x) = x$ exakt gemacht werden (der seinerseits aus der üblichen Formel für einen integrierenden Faktor der Form $a(x)$ folgt).

Die Lösung lautet in beiden Fällen: $y_{ai} = \frac{x}{4}(2\ln x - 1) + \frac{c}{x}$

4) Es handelt sich um eine inhomogene, lineare DGL 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homogene DGL kann daher mit dem Euler-Ansatz gelöst werden. Die inhomogene DGL selber kann dann aber nicht mit einem Störgliedansatz gelöst werden, weil dieser i.A. aus der Inhomogenität und *allen* ihren Ableitungen bestehen muß — dies wären hier aber unendliche viele unterschiedliche Terme. Es läßt sich aber mit dem Ansatz $y = c(x) \cdot e^x$ (Variation der Konstanten in der allgemeinen Lösung der homogenen DGL) auf dem üblichen Weg (Ansatz einsetzen, $c'(x)$ isolieren, integrieren) ein Ausdruck für $c(x)$ bestimmen und damit eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet dann:

$$y_{ai} = ce^x + e^{\sin x}$$

Einsetzen dieser Lösung in die ursprüngliche DGL bestätigt, daß es eine Lösung ist. Da sie eine freie Konstante c enthält und da die DGL 1.Ordnung ist, ist es auch die allgemeine Lösung.

5) Der Potenzreihenansatz liefert auf dem üblichen Weg (inkl. ggf. Variablentransformation in den Summen, anschließend Koeffizientenvergleich) direkt die angegebene Rekursionsformel, aus der die drei angegebenen Behauptungen trivial folgen. Daraus und aus (b) sieht man, daß die Funktionen $P_n(x)$ für gerades (ungerades) n nur gerade (ungerade) Potenzen von x enthalten und endlich viele Terme haben, bis genau zur Ordnung n inklusive.

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad , \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

6) a) Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, homogene DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Weil sie 2.Ordnung ist, hat ihre allgemeine Lösung 2 freie Koeffizienten; daher benötigt man zwei Anfangsbedingungen, um Werte für diese beiden Koeffizienten zu finden (eine spezielle Lösung enthält *keine* unbestimmten Koeffizienten).

b) Euler-Ansatz und Anfangsbedingungen liefern:

$$\begin{aligned} y_{ah} &= a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix} \\ &= c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ y_{ph} &= \sin(x) \end{aligned}$$

c) und e) Potenzreihenansatz liefert:

$$y_{ah} = b_0 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)}_{\cos(x)} + b_1 \underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right)}_{\sin(x)}$$

d) und e) Einsetzen des gegebenen Ansatzes liefert:

$$u'' \cos(x) - 2u' \sin(x) = 0$$

In dieser DGL fehlt u, daher Standardsubstitution $v = u', v' = u''$:

$$v' \cos(x) - 2v \sin(x) = 0$$

Separation dieser DGL liefert:

$$\begin{aligned} v &= \frac{c_1}{\cos^2(x)} \\ u &= c_1 \tan(x) + c_2 \\ y &= c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \end{aligned}$$

7) a) Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, homogene DGL 3.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, x und y fehlen.

b) Die angegebene Substitution liefert eine lineare, homogene DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die sich mit dem Euler-Ansatz lösen läßt. Integration der allg.Lösung in u liefert die allg.Lösung in y:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3$$

c) Der Potenzreihenansatz liefert diese Lösung:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \right) \\ & \quad a_2 \left(x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots \right) \end{aligned}$$

d) Aus der e^x-Standardtaylorreihe folgt:

$$\begin{aligned} e^{2x} + e^{-2x} &= 4 \left(\frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots \right) \\ e^{2x} + e^{-2x} &= 4 \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \right) \end{aligned}$$

d.h. die Potenzreihenlösung findet eine andere Linearkombination der beiden Terme aus dem direkten Lösungsweg. Das ist o.k., weil es sich um eine lineare DGL handelt.